NIEPEWNOŚCI POMIAROWE I ICH ANALIZA W PRZYKŁADZIE

(P.Tomkiewicz, S.Arabasz, M. Miczek, L. Grządziel i M.Kwoka)

Niniejsze opracowanie jest uzupełnieniem do literatury obowiązującej na laboratoriach. Związku z tym nie powinno być traktowane jako jedyne źródło wiedzy na temat opracowywania wyników pomiarów, lecz jako praktyczne zastosowanie obowiązujących w nich reguł.

Ważniejsze pozycje literaturowe:

- R.Respondowski, „Laboratorium z fizyki" – skrypt Politechniki Śląskiej.
- H.Szydłowski, „Niepewności w pomiarach" – Wydawnictwo naukowe UAM, Poznań 2001.

Dodatkowe materiały:

- http://fizyka.polsl.gliwice.pl/dydaktyka/lab

I PODSTAWOWE WZORY I DEFINICJE

Tabela 1

Wartość mierzona = wartość realna + błąd

Nie znamy ani wartości realnej ani błędu. Dlatego wprowadzamy pojęcie **niepewności,** która jest statystycznym oszacowaniem błędu. Takie przejście z dowolnego typu błędu (np.: systematycznego, losowego i całkowitego) na niepewność realizuje się matematycznie po przez podzielenie wartości błędu przez wartość $\sqrt{3}$. Taka operacja zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa jednostajnego daje przedział ufności równy 68%.

Związku z tym *poprawny zapis** następującej postaci:

x jednostka, u(x) jednostka
(np.: t = 10.42 s, u(t) = 0.65 s)

oznacza iż wartość realna znajduje się w przedziale wartości od t - u(t) do t + u(t) z prawdopodobieństwem 0.68.

* Inna poprawna forma zapisu wyniku: **X = (x ± u(x)) jednostka**, np.: t = (10.42 ± 0.65) s

Tabela 2

Błąd gruby

Występuje w serii pomiarowej gdy jedna z wartości znacząco odbiega od trendu wyznaczanego przez pozostałe wartości w serii. Taki wynik odrzucamy a pomiar powtarzamy

Przykład : W serii pomiarowej uzyskano następujące wyniki okresu wahadła:

Okres T s	
2.38	
2.42	
2.36	
4.86	< **Błąd gruby**
2.41	

Tabela 3

Błąd systematyczny

Jest to błąd związany z dokładnością miernika

a. W przypadku mierników analogowych

Błąd jest określany zgodnie z następującym wzorem:

Błąd systematyczny:	$\Delta_s x = \dfrac{(klasa\ miernika)\cdot(zakres\ pomiarowy)}{100}$
Niepewność systematyczna:	$u_s(x) = \dfrac{\Delta_s x}{\sqrt{3}}$

Przykład: miernik o klasie 0.5 i zakresie pomiarowym 200 mA:

Błąd systematyczny:	**$\Delta_s x$ = 1 mA**
Niepewność systematyczna:	**$u_s(x)$ = 0.58 mA**

b. W przypadku mierników cyfrowych

Błąd jest określany wzorem podawanym przez producenta miernika. Na ogół przyjmuje on następującą zależność:

Błąd systematyczny:	$\Delta x_S = C_1\cdot$(wartość wskazywana)$+C_2\cdot$(waga ostatniej cyfry)
Niepewność systematyczna:	$u_s(x) = \dfrac{\Delta_s x}{\sqrt{3}}$

Gdzie C_1 I C_2 są stałymi podawanymi przez producenta. *(W laboratorium parametry te można znaleźć przypięte do szafy z instrukcjami i miernikami)*

Przykład: Dla miernika producent podał odpowiednio: C_1 = 0.02, C_2 = 2
a miernik cyfrowy zmierzył wartość prądu I = 1.234 mA

Błąd systematyczny:	**$\Delta_s x$** = (0.02 * 1.234) + (2 * 0.001) **= 0.027 mA**
Niepewność systematyczna:	**$u_s(I)$ = 0.016 mA**

c. W przypadku mierników zliczających

W tym wypadku nie mówi o błędzie lecz o **niepewności.**

Niepewność systematyczna:	$u_s(N) = \sqrt{N}$

Przykład: Zarejestrowano n = 500 zliczeń preparatu promieniotwórczego

Niepewność systematyczna:	**$u_s(N)$ = 22 zliczenia**

Tabela 3 cd.

d. W przypadku linijek I śrub mikrometrycznych
Błąd jest wyznaczany przez najmniejszą podziałkę.

Przykład 1: Dla zwykłej linijki z podziałką milimetrową

Błąd systematyczny:	$\Delta_s x = 1$ mm
Niepewność systematyczna:	$u_s(x) = 0.56$ mm

Przykład 2: Dla zwykłej śruby mikrometrycznej

Błąd systematyczny:	$\Delta_s x = 1\ \mu$m
Niepewność systematyczna:	$u_s(x) = 0.56\ \mu$m

Tabela 4

Błędy losowe

O istnieniu błędów losowych dowiadujemy się jedynie w przypadku powtórzenia pomiaru danej wielkości fizycznej w tych samych warunkach.

a. W przypadku krótkich serii pomiarowych (liczba pomiarów < 10)
Błąd losowy może być wyznaczony za pomocą dwóch wzorów (błąd maksymalny i błąd średni), które mogą być wykorzystywane wymiennie:

	Błąd losowy	Niepewność losowa
Błąd maksymalny	$\Delta_{maks} T = \left\| T_i - \overline{T} \right\|_{maks}$	$u_l(T) = \dfrac{\Delta_{maks} T}{\sqrt{3}}$
Błąd średni	$\Delta_{śr} T = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\| T_i - \overline{T} \right\|$	$u_l(T) = \dfrac{\Delta_{śr} T}{\sqrt{3}}$

Przykład 2: W serii pomiarowej uzyskano następujące wyniki:

U V
6.00
6.10
6.13
5.90

Błąd losowy	$\Delta_l U = 0.098$ V
Niepewność losowa	$u_l(U) = 0.056$ V

b. W przypadku serii pomiarowych gdzie liczba pomiarów jest większa niż 10
W tym wypadku także nie mówimy o błędzie, lecz o **niepewności**, która jest równa standardowemu odchyleniu średniej z serii pomiarowej:

Niepewność losowa:	$u_l(T) = \sigma_{\overline{T}} = \sqrt{\dfrac{1}{n}}\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(T_i - \overline{T}\right)^2}$

Uwaga: ze wzrostem n niepewność u(T) maleje raczej wolno !!!

Tabela 5

Błąd całkowity

Błąd całkowity uwzględnia błąd systematyczny miernika i błąd losowy według poniższych równań

Błąd całkowity:	$\Delta_c(a) = \sqrt{(\Delta_s a)^2 + (\Delta_l a)^2}$
Niepewność całkowita:	$u_c(a) = \sqrt{[u_s(a)]^2 + [u_l(a)]^2} = \dfrac{\Delta_c(a)}{\sqrt{3}}$

Tabela 6

Zasady zaokrąglania wyników:

a. Niepewność zaokrąglamy do dwóch cyfr znaczących
b. Rząd wyniku musi być zgodna z rzędem zaokrąglonej niepewności
c. Niepewności zaokrąglamy zawsze w górę nigdy w dół

Przykłady:

Wielkość zmierzona	Obliczona Niepewność całkowita pomiaru	Poprawny zapis
I = 5.6545 mA	u_c(I) = 0.0**11**2 mA	I = 5.655 mA, u(I) = 0.012 mA
U = 20.54 V	u_c(I) = **1.1**7 V	U = 20.6 V, u(U) = 1.2 V
R = 4.4815*10^4 Ω	u_c(R) = 0.0**10**2*10^4 Ω	R = 44.82 kΩ , u(I) = 0.11 kΩ

Cyfra znacząca – pierwsza niezerowa liczba od strony lewej. Druga znacząca cyfry może być równa zero. W tabeli cyfry znaczące są pogrubione.

Tabela 7

Propagacja niepewności:

Dana jest funkcja **f(x,y,z)** i niepewności całkowite **u_c(x)**, **u_c(y)**, **u_c(z)**

To niepewność:
$$u_c(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 [u_c(x)]^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 [u_c(y)]^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 [u_c(z)]^2}$$

Przykład : chcemy wyznaczyć g – przyśpieszenie ziemskie które wyznaczamy ze wzoru znając L i T: $g = 4\pi^2 \dfrac{L}{T^2}$

Kiedy wyznaczymy niepewności całkowite L i T [u_c(L) i u_c(T)] możemy wyznaczyć niepewność pomiarów pośrednich z następującego wzoru:

$$u_c(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial L}\right)^2 [u(L)]^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 [u(T)]^2} = \sqrt{\left(4\pi^2 \frac{1}{T^2}\right)^2 [u(L)]^2 + \left(4\pi^2 \frac{2L}{T^3}\right)^2 [u(T)]^2}$$

Tabela 8

Średnia ważona:

Uwaga: Najczęściej $c = 1$

$$P_{św} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}, \ gdzie \ w_i = \frac{c}{\left[u_c(P_i)\right]^2}$$

Niepewność średniej ważonej:

Gdy źródłem niepewności $u(g_i)$ są **błędy systematyczne**	$u(g_{wm}) = \frac{\sum w_i u(g_i)}{\sum w_i}$
Gdy źródłem niepewności $u(g_i)$ są **błędy losowe**	$u(g_{wm}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left[u(g_i)\right]^2}\right)^{-1/2}$

Tabela 9

Niepewność względna:

$$u_w(x) = \frac{u_c(x)}{x} 100\%$$

Przykład 1: W wyniku analizy niepewności otrzymano:
I= 5.57 mA, u(I) = 0.23 mA, gdzie niepewność względna wynosi:

$$u_w(i) = \frac{u_c(I)}{I} 100\% = \frac{0.23}{5.57} 100\% = 4.3\%$$

II PRZYKŁADY

Przykład 1: Wyznaczanie pola trójkąta i jego niepewności

W ćwiczeniu dokonujemy bezpośredniego pomiaru długości podstawy trójkąta i jego wysokości. W wyniku 6-ciu pomiarów otrzymujemy następującą tabelę pomiarową:

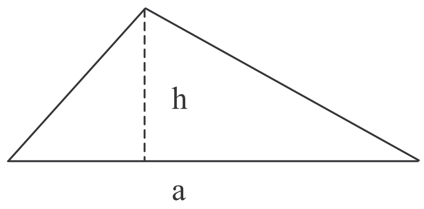

Tabela pomiarowa

Pomiar	a cm	h cm
1	5.1	4.0
2	5.2	4.1
3	4.9	4.2
4	5.0	4.0
5	5.1	3.9
6	**8.2**	**7.3**

1. **Etap:** Przeprowadzamy wstępną analizę wyników w wyniku której odrzucamy **błędy grube** (patrz tabela 2).

W naszym przypadku pomiar numer 6 odrzucamy (w dalszych obliczeniach punkt ten nie jest brany pod uwagę), ponieważ jego wartość znacząco odbiegają od pozostałych wartości a i h w serii pomiarowej.

2. **Etap:** Obliczamy wartości średnich arytmetycznych a i h

	a cm	h cm
Wartość średnia	5.06	4.04

3. **Etap:** Obliczamy pole trójkąta zgodnie ze wzorem na pole trójkąta:

P = (1/2 * a * h) = (1/2 * 5.06 * 4.04) = 10.22 cm

Analiza niepewności

4. **Etap:** Każdy pomiar bezpośredni jest obarczony błędem związanym z dokładnością miernika. Taki rodzaj błędu nazywamy **błędem systematycznym** (patrz tabela 3).

W naszym przykładzie do wyznaczenia wielkości podstawy trójkąta a (cm) i jego wysokości h (cm) posłużyliśmy się linijką z najmniejszą podziałką 1mm. Dlatego zgodnie z tabelą 3 błąd i niepewność systematyczna wynoszą odpowiednio:

	a cm	**h cm**
Błąd systematyczny:	$\Delta_s a = 0.10$	$\Delta_s h = 0.10$
Niepewność systematyczna:	$u_s(a) = 0.056$	$u_s(h) = 0.056$

5. **Etap:** Jak łatwo zauważyć w tabeli pomiarowej wyniki podstawy a i wysokości h trójkąta różnią się od siebie o wartości większe niż wskazuje na to błąd systematyczny (np.: $\Delta_s a = 1$ mm, $a_2 - a_3 = 2$ mm). Ta rozbieżność jest wynikiem istnienia **błędów losowych** (patrz tabela 4).

Zgodnie z tabelą 4 obliczamy błędy losowe dla a i h. W naszym przykładzie wykorzystamy wzór na błąd maksymalny ponieważ liczba pomiarów w serii a i h jest mniejsza niż 10:

Pomiar	**a cm**	**h cm**	**a_{sr}-a_i cm**	**h_{sr}-h_i cm**
1	5.1	4	0.04	0.04
2	5.2	4.1	0.14	0.06
3	4.9	4.2	**0.16 - MAX**	**0.16 - MAX**
4	5.0	4	0.06	0.04
5	5.1	3.9	0.04	0.14
Średnia	5.06	4.04		

	a cm	**h cm**
Błąd losowy:	$\Delta_l a = 0.16$ cm	$\Delta_l h = 0.16$ cm
Niepewność losowa:	$u_l(a) = 0.093$ cm	$U_l(h) = 0.093$ cm

6. **Etap:** Po wyznaczeniu niepewności systematycznych i losowych dla każdej z wielkości a i h obliczamy **niepewność całkowitą** (patrz tabela 5) która uwzględnia oba źródła błędów.

	a cm	**h cm**
Błąd całkowity:	**$\Delta_c a = 0.19$ cm**	**$\Delta_c h = 0.19$ cm**
Niepewność całkowita:	**$u_c(a) = 0.11$ cm**	**$u_c(h) = 0.11$ cm**

7. **Etap:** Tak otrzymane niepewności całkowite i wartości średnie zaokrąglamy i zapisujemy w odpowiedniej formie zgodnie z **zasadami zaokrąglania** przedstawionymi w tabeli 6.

- **a = 5.06 cm, u(a) = 0.11 cm**
- **h = 4.04 cm, u(a) = 0.11 cm**

Tak zapisany wynik zgodnie z **definicją niepewności** (tabela 1) np.: dla podstawy trójkąta oznacza iż wartość realna a znajduje się w przedziale od 4.95 cm do 5.17 cm z prawdopodobieństwem 0.68.

8. Etap: Do tej pory wyznaczyliśmy niepewności w pomiarach bezpośrednich. Często jednak bywa iż wielkości takie jak np.: a i h służą do wyznaczenia innej wielkości której są funkcją (w naszym przypadku pola trójkąta). Znając niepewności całkowite a i h możemy zbadać ich **propagacje** (patrz tabela 7) w wyniku końcowym.

Obliczamy niepewność końcową pola trójkąta wykorzystując wzór na propagację niepewności z tabeli 7

$$u_c(P)=\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)^2[u_c(a)]^2+\left(\frac{\partial P}{\partial h}\right)^2[u_c(h)]^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}h\,u_c(a)\right)^2+\left(\frac{1}{2}a\,u_c(h)\right)^2}$$

9. Etap: Po obliczeniu niepewności pola trójkąta, wynik zaokrąglamy i zapisujemy w poprawnej końcowej formie:

$$\boxed{\mathbf{P = 10.22\ cm^2\ ,\ u(P) = 0.36\ cm^2}}$$

Koniec analizy niepewności

Przykład 2: Kilku studentów wyznaczyło pole trójkąta zgodnie z przykładem 1.

Ćwiczenie nr.1 zostało wykonane 4-krotnie przez różne sekcje na zajęciach. W wyniku pomiarów i analizy niepewności otrzymaliśmy następującą tabelę pomiarową.

Pomiar	P cm^2	u(P) cm^2
1	10.22	0.36
2	9.81	0.42
3	11.03	0.34
4	10.54	0.12

W karcie pomiarowej łatwo zauważyć iż niepewności pola trójkąta wyznaczone przez 4 różne sekcje różnią się. W celu uwzględnienia wyników tych niepewności (intuicyjnie lepszy wynik mają studenci o mniejszej niepewności) stosujemy wzory na **średnią ważoną** (patrz tabela 8) a nie na średnią arytmetyczną.

1. **Etap:** Dla ułatwienia obliczeń wykonujemy następującą tabelę która zawiera wagi i jej iloczyny odpowiednio z wartością pola i jego niepewności.

Pomiar	P cm^2	u(P) cm^2	waga	waga*P	waga*u(P)
1	10.22	0.36	7.72	78.86	2.78
2	9.81	0.42	5.67	55.61	2.38
3	11.03	0.34	8.65	95.42	2.94
4	10.54	0.12	69.44	731.94	8.33
		Suma	**91.48**	**961.83**	**16.43**

2. **Etap:** Podstawiając w ten sposób obliczone sumy do wzorów na średnią ważoną (tabela 8) wyznaczamy:

- Średnią ważoną pola trójkąta : P = 10.51 cm^2
- Niepewność losową średniej ważonej: u(P) = 0.10 cm^2
- Niepewność systematyczną średniej ważonej: u(P) = 0.18 cm^2

Ponieważ niepewności pól wyznaczone w ćwiczeniu nr.1 zawierają w sobie niepewności losowe i systematyczne, dlatego z pośród wyliczonych wartości niepewności wybieramy największą.

3. **Etap:** W naszym przypadku niepewność systematyczna jest większa od niepewności losowej dlatego wynik końcowy ćwiczenia zapisujemy następująco:

P = 10.51 cm^2 , u(P) = 0.18 cm^2

4. **Etap:** Dodatkowo możemy wyznaczyć **niepewność względną** (patrz tabela 9)

$$u_w(P) = \frac{u_c(P)}{P}100\% = \frac{0.18}{10.51}100\% = 1.8\%$$

Uwagi końcowe

1. **Metoda najmniejszych kwadratów – regresja liniowa**

Błąd otrzymany z regresji liniowej jest uważany za niepewność. Dlatego nie dzielimy go przez $\sqrt{3}$.